MS-A020X ratkaisut 21.2.2022

Tehtävä 1

> $x := t \to 1 - 4 \cdot t^2; y := t \to 4 \cdot t - t^3$

$$x := t \mapsto 1 - 4 \cdot t^2$$
$$y := t \mapsto 4 \cdot t - t^3 \tag{1.1}$$

> $solve(y(t) = 0)$

$$0, 2, -2 \tag{1.2}$$

Kysytyt arvot ovat ± 2.

>

Tangenttivektoreiden komponentit ovat

> $x'(2), y'(2)$

$$-16, -8 \tag{1.3}$$

> $x'(-2), y'(-2)$

$$16, -8 \tag{1.4}$$

> $evalf\left(\arccos\left(\frac{x'(2) \cdot x'(-2) + y'(2) \cdot y'(-2)}{\mathrm{sqrt}\left(x'(2)^2 + y'(2)^2\right) \cdot \mathrm{sqrt}\left(x'(-2)^2 + y'(-2)^2\right)}\right)\right)$

$$2.214297436 \tag{1.5}$$

> $convert(\%, degrees)$

$$126.8698976\ degrees \tag{1.6}$$

Hyväksytään myös komplementtikulma 53 astetta, koska **käyrien** leikkauskulma rajataan yleensä alle 90 asteeseen.

> $Int\left(\mathrm{sqrt}\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right), t = -2..2\right) = int\left(\mathrm{sqrt}\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right), t = -2..2\right)$

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{64\, t^2 + \left(-3\, t^2 + 4\right)^2}\, \mathrm{d}t = \frac{32\sqrt{5}}{3} + \frac{128\, \mathrm{EllipticF}\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}{81} + \frac{160\, \mathrm{EllipticPi}\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, 1, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}{81} \tag{1.7}$$

> $evalf(rhs(\%))$

$$35.94993076 \tag{1.8}$$

rhs = right hand side, neliöjuuren allla olevaa lauseketta ei tarvitse sieventää/laskea auki.

Tehtävä 2

> $g := (x, y, z) \to x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^5 - \sin(z)$

$$g := (x, y, z) \mapsto x^2 - 2 \cdot y \cdot x + y^5 - \sin(z) \tag{2.1}$$

> $g(1, 1, 0)$

$$0 \qquad (2.2)$$

Tämä ei ole suoraan funktion kuvapinta (mutta voidaan muuntaa arcsin-funktiolla), joten lasketaan normaali muodossa ∇g.

> $diff(g(x, y, z), x)$

$$2\,x - 2\,y \qquad (2.3)$$

> $a := subs(\{x = 1, y = 1, z = 0\}, \%)$

$$a := 0 \qquad (2.4)$$

>

> $diff(g(x, y, z), y)$

$$5\,y^4 - 2\,x \qquad (2.5)$$

> $b := subs(\{x = 1, y = 1, z = 0\}, \%)$

$$b := 3 \qquad (2.6)$$

> $diff(g(x, y, z), z)$

$$-\cos(z) \qquad (2.7)$$

> $c := simplify(subs(\{x = 1, y = 1, z = 0\}, \%))$

$$c := -1 \qquad (2.8)$$

Tangenttitason yhtälö on

> $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$

$$3\,y - z = d \qquad (2.9)$$

jossa

> $d := subs(\{y = 1, z = 0\}, lhs(\%))$

$$d := 3 \qquad (2.10)$$

Tehtävä 3

> $f := (x, y) \rightarrow \exp(-x) \cdot \sin(2 \cdot y)$

$$f := (x, y) \mapsto e^{-x} \cdot \sin(2 \cdot y) \qquad (3.1)$$

> $mtaylor(f(x, y), [x, y], 3)$

$$-2\,x\,y + 2\,y \qquad (3.2)$$

Tämä on kysytty 2. asteen polynomi, koska funktion sarjakehitelmässä ei ole 3:nnen asteen termejä. Laskutapa: Joko osittaisderivaattojen avulla tai käyttämällä tunnettuja yhden muuttujan polynomeja, joista valitaan sopivat termit.

Tehtävä 4

> $f := (x, y, z) \rightarrow 2 \cdot x - 4 \cdot y + 8 \cdot z$

$$f := (x, y, z) \mapsto 2 \cdot x - 4 \cdot y + 8 \cdot z \qquad (4.1)$$

> $g := (x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 21$

$$g := (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 21 \qquad (4.2)$$

Funktion g gradientilla ei ole nollakohtia joukossa $g(x, y, z) = 0$, joten erikoistapauksia ei ole.

> $diff(f(x, y, z), x) = \lambda \cdot diff(g(x, y, z), x), diff(f(x, y, z), y) = \lambda \cdot diff(g(x, y, z), y), diff(f(x, y, z), z) = \lambda \cdot diff(g(x, y, z), z), g(x, y, z) = 0$

$$2=2\,\lambda\,x,\ -4=2\,\lambda\,y,\ 8=2\,\lambda\,z,\ x^2+y^2+z^2-21=0 \tag{4.3}$$

> $solve(\{\%\})$

$$\{\lambda=1,\ x=1,\ y=-2,\ z=4\},\ \{\lambda=-1,\ x=-1,\ y=2,\ z=-4\} \tag{4.4}$$

> $f(1,-2,4)$

$$42 \tag{4.5}$$

> $f(-1,2,-4)$

$$-42 \tag{4.6}$$

Nämä ovat kysytyt max ja min. Ne saavutetaan pisteissä, joissa taso $f(x,y,z)=vakio$ sivuaa palloa $g(x,y,z)=0$.

Tehtävä 5

Integraali kannattaa laskea napakoordinaateissa, jolloin $dA=r\,dr\,d\theta$.

> $int\left(\dfrac{r}{1+r^2},\ \theta=0\,..2\cdot\mathrm{Pi}\right)$

$$\frac{2\,r\,\pi}{r^2+1} \tag{5.1}$$

> $int(\%,\ r=1\,..\mathrm{infinity})$

$$\infty \tag{5.2}$$

Integraali ei siis suppene vaan hajaantuu.

Tehtävä 6

> $restart$

> $assume(a>0)$

> $about(a)$

```
Originally a, renamed a~:
  is assumed to be: RealRange(Open(0),infinity)
```

> $\rho := (x,y,z)\rightarrow \mathrm{abs}(z)+a$

$$\rho := (x,y,z)\mapsto |z|+a \tag{6.1}$$

> $int(\rho(x,y,z),\ z=-a\,..a)$

$$3\,a\text{~}^2 \tag{6.2}$$

> $int(\%,\ y=-a\,..a)$

$$6\,a\text{~}^3 \tag{6.3}$$

> $m := int(\%,\ x=-a\,..a)$

$$m := 12\,a\text{~}^4 \tag{6.4}$$

> $int(\rho(x,y,z)\cdot(x^2+y^2),\ z=-a\,..a)$

$$3\,a\text{~}^2\,(x^2+y^2) \tag{6.5}$$

> $int(\%,\ y=-a\,..a)$

$$2\,a\text{~}^5+6\,a\text{~}^3\,x^2 \tag{6.6}$$

> $IM := int(\%, x = -a..a)$

$$IM := 8\, a\sim^{6} \tag{6.7}$$

Symbolia I ei voi käyttää, koska se on imaginaariyksikkö.

> $k := \dfrac{IM}{m \cdot a^2}$

$$k := \frac{2}{3} \tag{6.8}$$