MS-A0002 Matriisilaskenta
Luento 1:Vektorit ja lineaariyhdistelyt

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Vektorit

- Pysty- eli sarakevektori

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

missä v_1, v_2 ovat $\mathbf{v}$:n komponentit.
- Yhteenlasku

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$

- **Esim.**

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Vektorit

- **Vektorin kertominen skalaarilla**:

$$2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix}; \quad -\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -w_1 \\ -w_2 \end{pmatrix}$$

- Näin saadaan vektorien vähennyslasku $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}$.
- Huomaa, että $\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, missä $\mathbf{0}$ on vektori, jonka kaikki komponentit ovat nollia.
- **Esim.**

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad 2\mathbf{v} - \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 3 \\ 2\cdot 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lineaariyhdistelyt

- Vektoreiden $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ lineaariyhdistely on lauseke muotoa $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$, missä c ja d ovat skalaareja.
- Olkoon joukko $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m\}$ (vektoreita) ja vastaavasti $\mathbf{a} = \{a_1, ..., a_m\}$, $m \geq 1$ (skalaareja).
- Eräs lineaariyhdistely on tällöin

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{x}_j.$$

Vektorit lukiossa ja tällä kurssilla

- Matriisilaskun vektorit eroavat ns. fysikaalisista vektoreista, koska origo on aina kiinnitetty ja sitä esittää jo edellä nähty nollavektori.
- **Geometria**: Vektorin komponenttien lukumäärä on sen dimensio.
- Koulugeometria käsittelee vektoreita, joiden komponenttien lukumäärä on kaksi tai kolme, mutta osoittautuu, että on mielekästä tarkastella myös korkeampia dimensioita.

Lineaariyhdistelyt

- Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ avaruuden vektoreita. Lineaariyhdistelyillä
  a $c\mathbf{u}$
  b $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$
  c $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} + e\mathbf{w}$

  on geometriset tulkinnat, kun tarkastellaan kaikkien lineaariyhdistelyiden joukkoa.
- Saadaan a) suora, b) taso, c) avaruus (3D).

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 2: Vektorien sisätulo, pituus ja yhtälöryhmät

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Piste- eli sisätulo 1/2

- Vektoreiden $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ sisätulo on luku $v_1 w_1 + v_2 w_2$.
- Jos sovitaan, että vektori $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, niin voidaan kirjoittaa
  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$.

Piste- eli sisätulo 2/2

- Tällöin sisätulo voidaan merkitä tutusti

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

- Dimensiossa n:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{j=1}^{n} v_j w_j.$$

- **Esim.**

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 14.$$

Vektorin pituus eli normi 1/2

- Vektorin $\mathbf{v}$ pituus $||\mathbf{v}||$ määritellään sisätulon avulla:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

- Yksikkövektorin $\mathbf{u}$ pituus on yksi, tällöin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$. Vektorin $\mathbf{v}$ suuntainen yksikkövektori on $\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$.
- **Esim.**

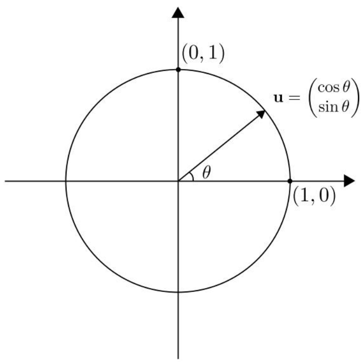
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad ||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{1 \cdot 1 + 3 \cdot 3} = \sqrt{10},$$

$$\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vektorin pituus eli normi 2/2

Yksikköympyrä tasossa

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = \cos\theta$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{j} = \sin\theta$



Vektoreiden välinen kulma 1/2

Vektoreiden kohtisuoruus

- Kaksi vektoria $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ ovat keskenään kohtisuorassa, jos niiden sisätulo on nolla, eli $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.
- Kosinikaava

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||} = \cos\theta$$

- Kosinikaavan avulla saadaan kaksi epäyhtälöä:
  - *Schwarzin epäyhtälö*: $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq ||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||$
  - *Kolmioepäyhtälö*: $||\mathbf{v} + \mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$

Vektoreiden välinen kulma 2/2

Todistus

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}\\ &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}\\ &= ||\mathbf{v}||^2+2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+||\mathbf{w}||^2\\ &\le ||\mathbf{v}||^2+2||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||+||\mathbf{w}||^2\\ &= (||\mathbf{v}||+||\mathbf{w}||)^2.\end{aligned}$$

Yhtälöpari: esimerkki

- Tarkastellaan lineaarista yhtälöparia

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 &= 2\\ x_1 + x_2 &= 5\end{cases}$$

- Ratkaistaan yhtälöpari käyttämällä yhteenlaskumenetelmää. Kerrotaan alempi yhtälö 2:lla ja lasketaan yhtälöt yhteen:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 &= 2\\ 2x_1 + 2x_2 &= 10\end{cases}$$

Esimerkki jatkuu

- Saadaan $6x_1 = 12 \Rightarrow x_1 = 2$. Sijoittamalla tämä arvo alempaan yhtälöön saadaan $2 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 3$. Yhtälöparin ratkaisu on siis

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

- Huomaa, että kumpikin esimerkin yhtälö kuvaa suoraa tasossa $\mathbb{R}^2$, ja yhtälöparin ratkaisu (x_1, x_2) on suorien leikkauspiste. Yleisemmin, yhtälöparilla voi olla joko 0 (kaksi samansuuntaista suoraa), 1 (kaksi leikkaavaa suoraa) tai äärettömän monta (päällekkäiset suorat) ratkaisua.

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 3 : Matriisi, lineaarinen riippumattomuus ja yhtälöryhmät matriisimuodossa

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Matriisi

- Aiemmin on jo havaittu, että avaruus tulee viritettyä kolmella vektorilla, eli kolmen vektorin kaikki lineaariyhdistelyt tuottavat kaikki avaruuden pisteet eli vektorit.
- Huomaa, että ilmeisesti jotain on vaadittava valituilta vektoreilta!

Matriisi - esimerkki

- Olkoon
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
- jolloin lineaariyhdistelyt ovat muotoa $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} + e\mathbf{w}$:
$$c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d-c \\ e-d \end{pmatrix}.$$
- Kirjoitetaan laskutoimitus matriisimuotoon $\mathbf{Ax}$, missä $\mathbf{A}$ on vektoreiden $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ muodostama matriisi ja $\mathbf{x}$ on vektori, jonka komponentit ovat skalaarit c, d, e.

Matriisi-vektoritulo

Matriisi-vektoritulo

$$\mathbf{Ax} = (\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}) \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} = c\mathbf{u} + d\mathbf{v} + e\mathbf{w}.$$

Matriisi-vektoritulo: esimerkki

- **Edellinen esimerkki**
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d-c \\ e-d \end{pmatrix}$$
- Vaihtoehtoinen laskutoimitus:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0,0) \cdot (c,d,e) \\ (-1,1,0) \cdot (c,d,e) \\ (0,1,1) \cdot (c,d,e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d-c \\ e-d \end{pmatrix}$$
-rivien ja vektorin sisätulot.

Lineaarinen riippumattomuus ja riippuvuus

Lineaarinen riippumattomuus

- Olkoot $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ vektoreita ja $a_1, \ldots, a_m$ tuntemattomia skalaareja. Vektorit $\mathbf{x}_j$ ovat lineaarisesti riippumattomia, jos yhtälön
$$\sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{x}_j = 0$$
ainoa ratkaisu on $a_1 = \ldots = a_m = 0$. Jos muita ratkaisuja on olemassa, ovat vektorit lineaarisesti riippuvia.
- Tulkinta: Jos $\mathbf{A}$:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia, niin $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$. $\mathbf{A}$ on säännöllinen.
- Muutoin $\mathbf{A}$ on singulaarinen.

Yhtälöpari matriisimuodossa

- Edellisen luennon yhtälöpari voidaan kirjoittaa myös matriisimuodossa $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, missä
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{ja } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$
eli
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Yhtälöryhmä

- Vastaavasti 3:n muuttujan yhtälöryhmä
$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 6 \\ 2x + 5y + 2z & = 4 \\ 6x - 3y + z & = 2 \end{cases}$$
voidaan kirjoittaa matriisimuodossa $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seuraavasti
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Yhtälöryhmien geometria

- Geometriassa:
$$\begin{cases} 4 - 2y & = 2 \\ x + y & = 5 \end{cases} \text{; Kahden suoran leikkaus yhdessä pisteessä}$$
$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 6 \\ 2x + 5y + 2z & = 4 \\ 6x - 3y + z & = 2 \end{cases} \text{; Kolmen tason leikkaus yhdessä pisteessä}$$
- Yhtälöryhmillä on siis mitä ilmeisimmin joko nolla, yksi tai äärettömän monta ratkaisua.
- Toinen tulkinta ratkaisulle: Kerroinmatriisin sarakkaiden lineaariyhdistely, missä skalaarit on etsittävä.
- Huomaa, että ratkaisujen mahdolliset lukumäärät ovat samat!

Identiteettikuvaus

- Maailman helpoin tehtävä: $\mathbf{Ix} = \mathbf{b}$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

- Matriisi $\mathbf{I}$ on identiteettikuvaus, pätee $\mathbf{Ix} = \mathbf{x}$ kaikille $\mathbf{x}$.

Kolmiomatriisit

- Alakolmiomatriisi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

- Yläkolmiomatriisi:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 4: Eliminaatio matriiseilla

Antti Rasila

Aalto-yliopisto

2016

Gaussin eliminaatio

$$\begin{cases} x - 2y & = 1 \\ 3x + 2y & = 11 \end{cases} ; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Havaintoja:

- Yhtälöiden järjestyksellä ei ole väliä.
- Yhtälön kertominen puolittain tai niiden yhteenlasku ei muuta ratkaisua.
- (Tavoite): Gaussin eliminaatio Laaditaan algoritmi, joka saattaa alkuperäisen tehtävän yläkolmiomuotoon.

Rivioperaatio 1/4

- Kerrotaan eliminoitavan tuntemattoman riviä skalaarilla ja lasketaan kaksi yhtälöä yhteen. Skalaari valitaan siten, että summeeratussa yhtälössä eliminoitavan tuntemattoman kerroin on nolla.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[+]{-3} \begin{pmatrix} \underline{1} & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Rivioperaatio 2/4

- Ylläoleva merkintä tarkoittaa:

$$-3(x-2y)+3x+2y=-3\cdot 1+11 \quad \Leftrightarrow \quad 8y=8$$

- Ensimmäinen tuntematon eli x ei ole enää mukana yhtälössä eli se on eliminoitu.
- Luku $\underline{1}$ on ns. tukialkio (engl. pivot). Haluamme korvata luvun 3 nollalla, joten skalaariksi valitaan $-\frac{3}{1}$.

Rivioperaatio 3/4

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{2} & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[+,\ +]{-2} \begin{pmatrix} \underline{2} & 4 & -2 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[+]{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{2} & 4 & -2 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{4} & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x &= -1 \\ y &= 2 \\ z &= 2 \end{cases}$$

Rivioperaatio 4/4

- Huomaa, että tukialkiot voi lukea yläkolmiomatriisin lävistäjältä!
- Alkuperäinen tehtävä $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ on saatettu Gaussin algoritmilla muotoon $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$.

Yleinen tapaus: Yhdensuuntaiset suorat

- $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \urcorner^{-3} \\ \hookleftarrow_{+} \end{array} \begin{pmatrix} \underline{1} & -2 & 1 \\ 0 & \underline{0} & 8 \end{pmatrix}$$

  Huom! 0 ei voi olla tukialkio.
- Viimeinen yhtälö on epätosi, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Yleinen tapaus: Päällekkäiset suorat

- $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \urcorner^{-3} \\ \hookleftarrow_{+} \end{array} \begin{pmatrix} \underline{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Viimeinen yhtälö on tosi, y:n voi valita vapaasti.

Yleinen tapaus: Järjestyksen vaihto

- $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow\urcorner \\ \leftarrow\lrcorner \end{array} \begin{pmatrix} \underline{3} & -2 & 5 \\ 0 & \underline{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Matrisiin ja vektorin tulosta

- Matriisivektoritulo saa kaksi muotoa:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c}, \; \underset{m\times 1}{\mathbf{c}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_i \quad \text{(Sarakkaiden lineaariyhdistely)}$$

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \quad \text{(rivin i ja vektorin sisätulo)}$$

$$\underline{2 \times 2} : \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Matriisien tulo

- $$\underset{m\times n}{\mathbf{A}}\;\underset{n\times p}{\mathbf{B}} = (\mathbf{Ab}_1\ \mathbf{Ab}_2 \ldots \mathbf{Ab}_p) = \underset{m\times p}{\mathbf{C}}$$
- Vaihtoehtoisesti:
$$\underset{m\times p}{\mathbf{C}} = (\gamma_{ij}),\ \gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}.$$
- **Lause:** Matriisien tulo on assosiatiivinen $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$, mutta ei vaihdannainen $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (yleisesti).
- Huomaa! $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ (yleisesti).

Permutaatiomatriisi

- **Esim.**
$$\mathbf{P}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\quad \mathbf{P}_{23}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$\mathbf{P}_{23}$ vaihtaa oikeanpuoleisen matriisin rivit 2 ja 3 tulossa $\mathbf{P}_{23}\mathbf{A}$.

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 5: Matriisien laskulait

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Yhteenlasku

- Vaihdannaisuus:
$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$$
- Osittelulaki:
$$c(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$$
- Liitännäisyys:
$$\mathbf{A} + (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

Tulo (ei yleensä vaihdannainen)

- Vasen osittelulaki:

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA}+\mathbf{CB}$$

- Oikea osittelulaki:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$

- Liitännäisyys:

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

Tulon eksponenttilait neliömatriiseille

Neliömatriiseille $\underset{m\times m}{\mathbf{A}}$ on voimassa matriisien tulon eksponenttilait:

- $$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}_{\text{p kpl}}$$
- $$\mathbf{A}^p\mathbf{A}^q = \mathbf{A}^{p+q}$$
- $$(\mathbf{A}^p)^q = \mathbf{A}^{pq}$$

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 6: Käänteismatriisi

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Käänteismatriisin määritelmä

Määritelmä: Matriisi $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ on säännöllinen, jos on olemassa matriisi $\mathbf{A}^{-1}$ s.e. $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Havaintoja 1/3

Havaintoja:

- **i** $\mathbf{A}^{-1}$ on olemassa, jos ja vain jos eliminaatiossa löytyy n tukialkiota.
- **ii** $\mathbf{A}^{-1}$ on yksikäsitteinen.
- **iii** Jos $\mathbf{A}$ on säännöllinen, yhtälöryhmän $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ratkaisu on yksikäsitteinen $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Havaintoja 2/3

- **iv** Jos on olemassa $\mathbf{x} \neq 0$ s.e. $\mathbf{Ax} = 0$, niin $\mathbf{A}$ ei ole säännöllinen
- **v**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Huomaa! $ad - bc \neq 0$.

Havaintoja 3/3

- **vi** Lävistäjä- eli diagonaalimatriisin käänteismatriisi on olemassa, jos lävistäjäalkiot ovat erisuuria kuin nolla.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

Tulon käänteismatriisi

Tulon käänteismatriisi: $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 7: Gaussin-Jordanin menetelmä

Antti Rasila

Aalto-yliopisto

2016

Gaussin-Jordanin menetelmä 1/5

- Idea: Etsi $\underset{n\times n}{\mathbf{X}}$ s.e. $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}\,\mathbf{X} = \underset{n\times n}{\mathbf{I}}$. Sarakkeittan $\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n)$, missä $\mathbf{e}_i$:t ovat luonnolliset kantavektorit.
- Havainto: Eliminaatio ratkaisee n yhtälöryhmää yhtä aikaa! Edellisen nojalla $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$, jos olemassa.

Gaussin-Jordanin menetelmä 2/5

$$\begin{pmatrix} \underline{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\,+} \begin{pmatrix} \underline{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\frac{3}{2}} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{3}\,+}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\frac{3}{2}} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\frac{4}{3}} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Jordan: Vaihdetaan eliminaation suuntaa!

Gaussin-Jordanin menetelmä 3/5

Siinä missä eliminaatio alaspäin eliminoi tuntemattomia, eliminaatio ylöspäin sijoittaa tuntemattomien arvoja edellisiin yhtälöihin.
Kaksi vaihtoehtoa:

a. Jaetaan vasemmalle lävistäjälle identiteetti, ja sen jälkeen eliminoidaan ylöspäin.
b. Ensin ylöspäin eliminointi, sitten normeeraus.

- Kirjassa valittu b): Jatketaan esimerkkiä:

Gaussin-Jordanin menetelmä 4/5

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\tfrac{3}{2}} & -1 & \tfrac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\tfrac{4}{3}} & \tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \ \tfrac{2}{3} \\ \tfrac{3}{4} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} \underline{2} & 0 & 0 & \tfrac{3}{2} & 1 & \tfrac{1}{2} \\ 0 & \underline{\tfrac{3}{2}} & 0 & \tfrac{3}{4} & \tfrac{3}{2} & \tfrac{3}{4} \\ 0 & 0 & \underline{\tfrac{4}{3}} & \tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \tfrac{1}{2} \\ \mid \tfrac{2}{3} \\ \mid \tfrac{3}{4} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & \tfrac{3}{4} & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{4} \\ 0 & \underline{1} & 0 & \tfrac{1}{2} & 1 & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & \underline{1} & \tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{2} & \tfrac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Gaussin-Jordanin menetelmä 5/5

- Saatiin siis

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \tfrac{3}{4} & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{4} \\ \tfrac{1}{2} & 1 & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{2} & \tfrac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Terminologiaa

i **A** on symmetrinen: $\mathbf{A} = (\alpha_{ij}),\ \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$; $\mathbf{A}^{-1}$ on symmetrinen.

ii **A** on tridiagonaalimatriisi (kolme lävistäjää). Huomaa! $\mathbf{A}^{-1}$ ei ole tridiagonaalimatriisi.

iii Tukialkioiden tulo $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4 \neq 0$.
Luku 4 on **A**:n determinantti.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 8: LU-hajotelma

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Matriisihajotelmat 1/2

- Usein matriisiyhtälön $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ ratkaiseminen on epäkäytännöllistä ja hidasta. Siksi numeerisessa matriisilaskennassa usein pyritään esittämään matriisi $\mathbf{A}$ kahden tai usemman jotakin yksinkertaista muotoa olevan matriisin tulona.
- Tällaista esitystä kutsutaan matriisihajotelmaksi. Useimmat suorat (ei-iteratiiviset) menetelmät perustuvat hajotelmien käyttöön.

Matriisihajotelmat 2/2

- Hajotelma helpottaa matriisiyhtälön ratkaisemista ja saattaa myös antaa käyttökelpoista tietoa itse matriisista.
- Matriisihajotelmia on monia erilaisia, koska eri tilanteissa tarvitaan eri hajotelmia.
- Matriisihajotelmia ei yleensä kannata laskea käsin, mutta niitä löytyy valmiiksi implementoituna eri laskentaohjelmistoista ja -kirjastoista.

LU-hajotelma

- Tarkastellaan yhtälöryhmän $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ ratkaisemista, kun $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on yläkolmiomatriisi, eli $a_{jk} = 0$, kun $j > k$.
- Tällöin siis matriisiyhtälöä $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & y_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & y_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nn}x_n & = & y_n. \end{cases}$$

- Tällöin tuntemattomat $x_1, \ldots, x_n$ voidaan ratkaista takaisinsijoituksella.

Esimerkki

- Olkoot

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Tällöin

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0, \\ 4x_2 + 2x_3 & = & 16, \\ -2x_3 & = & 4. \end{cases}$$

- Saadaan $x_3 = -2$, eli $x_2 = \frac{1}{4}(16 - 2x_3) = 5$, ja $x_1 = 2x_2 - x_3 = 12$.
- Ratkaisu on siis $x = (12, 5, -2)$.

LU-hajotelma ja matriisiyhtälön ratkaiseminen 1/3

- Edellisen esimerkin menettelyä voidaan soveltaa yleisesti:

$$x_n = \frac{y_n}{a_{nn}}, \text{ ja } x_j = \frac{1}{a_{jj}}\Big(y_j - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk} x_j\Big).$$

- Matriisiyhtälön ratkaisemisen kannalta on siis edullista, jos matriisi **A** saadaan muutettua yläkolmiomuotoon (tai alakolmiomuotoon).

LU-hajotelma ja matriisiyhtälön ratkaiseminen 2/3

Tästä päädytään *LU-hajotelmaan*: Jos $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, niin etsitään sellaiset matriisit $\mathbf{L}, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, että

- 1) **L** on alakolmio- ja **U** on yläkolmiomatriisi, ja
- 2) $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.

LU-hajotelma ja matriisiyhtälön ratkaiseminen 3/3

- Tällöin yhtälö $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ voidaan ratkaista ratkaisemalla kaksi kolmiomatriisiyhtälöä

$$\begin{cases} \mathbf{Lz} &= \mathbf{y}, \\ \mathbf{Ux} &= \mathbf{z}, \end{cases} \quad \text{eli } \mathbf{Ax} = \mathbf{LUx} = \mathbf{Lz} = \mathbf{y}.$$

- Molemmat yhtälöt voidaan ratkaista takaisinsijoituksella: Ensin ratkaistaan **z** yhtälöstä $\mathbf{Lz} = \mathbf{y}$ ja sitten **x** yhtälöstä $\mathbf{Ux} = \mathbf{z}$.
- Seuraavaksi tutkitaan miten hajotelma $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ voidaan löytää nk. Doolittlen algoritmia käyttäen.

LU-hajotelman laskeminen 1/2

- Selvitetään aluksi tuntemattomien määrä. Matriisit **L** ja **U** ovat

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn}, \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn}. \end{pmatrix}$$

- Siten matriisiin **L** liittyvien tuntemattomien määrä on $n(n+1)/2$ ja samoin matriisiin **U** liittyvien. Yhteensä tehtävässä siis on $n^2 + n$ tuntematonta.
- Koska matriisissa **A** on vain n^2 alkiota, voidaan **L**:n tai **U**:n alkioista n kappaletta valita vapaasti.

LU-hajotelman laskeminen 2/2

Kiinnitetään jomman kumman diagonaalialkiot ykkösiksi. Jos

- $l_{11} = \ldots = l_{nn} = 1$, niin saadaan Doolittlen algoritmi, ja jos
- $u_{11} = \ldots = u_{nn} = 1$, saadaan Croutin algoritmi.
- **Huom.** Jos valitaan $l_{11} = \ldots = l_{nn} = 1$, niin $\det(\mathbf{L}) = 1$. Lisäksi, **A** on kääntyvä, jos ja vain jos $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ eli $\det(\mathbf{U}) \neq 0$.
  Siten **U** on kääntyvä ja siis **U**:n diagonaalialkiot ovat nollasta poikkeavia.

Esimerkki: Doolittlen menetelmä 1/2

Muodostetaan matriisin **A** LU-hajotelma Doolittlen menetelmällä, kun

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}.$$

- Ensimmäisellä rivillä saadaan heti $u_{11} = 3$, $u_{12} = 5$ ja $u_{13} = 2$. Toisella rivillä $l_{21}u_{11} = 0$, joten $l_{21} = 0$ (koska $u_{11} \neq 0$). Edelleen, $l_{21}u_{12} + u_{22} = 8$, joten $u_{22} = 8$ (koska $l_{21} = 0$).
- Saadaan myös $l_{21}u_{13} + u_{23} = 2$, ja siis $u_{23} = 2$ (koska $l_{21} = 0$). Samaan tapaan kolmannella rivillä $l_{31}u_{11} = 6$ ja siis $l_{31} = 2$ (koska $u_{11} = 3$).

Esimerkki: Doolittlen menetelmä 2/2

- Koska $l_{31} = 2$, $u_{12} = 5$ ja $u_{22} = 8$, saadaan yhtälöstä $l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 2$ ratkaistua $l_{32} = -1$.
- Lopuksi sijoittamalla saadut arvot yhtälöön $l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 8$ saadaan $u_{33} = 6$.
- Saadaan siis esitys

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Yleinen algoritmi toimii samaan tapaan, eli ratkaistaan **A**:n alkioista muodostuvat yhtälöt järjestyksessä $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{nn}$.

Huomautuksia 1/2

- Algoritmi katkeaa, jos **U**:n diagonaalille ilmestyy nollia.
- LU-hajotelmaa voidaan käyttää myös ei-kääntyville matriiseille.
- Ei-neliömatriisin $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ LU-hajotelmassa

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

on alakolmiomatriisi.

Huomautuksia 2/2

- Yläkolmiomatriisi on muotoa

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{mm} & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Esimerkki

- Kaikilla matriiseilla ei ole LU-hajotelmaa. Yritetään muodostaa hajotelma matriisille:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$

- Tällöin $ad = 0$ ja siten $a = 0$ tai $d = 0$.
- Lisäksi $ae = 1$, joten $a \neq 0$, ja $bd = -1$, joten $d \neq 0$.
- Nämä kolme ehtoa eivät voi olla samaan aikaan voimassa.
- Hajotelma voidaan kuitenkin löytää vaihtamalla rivien järjestystä.

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 9: Kompleksiluvut

Antti Rasila

Aalto-yliopisto

2016

Kompleksiluvut: määritelmä

Kompleksiluku on $z = x + iy$, missä imaginaariyksikkö i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$ ja x, y ovat reaalisia.

- $\mathrm{Re}(z) = x$ on z:n reaaliosa.
- $\mathrm{Im}(z) = y$ on z:n imaginaariosa.
- Esim. Kompleksiluvun $4 - 8i$ reaaliosa on 4 ja imaginaariosa -8.

Perusominaisuuksia

Kompleksiluvut $z = a + ib$ ja $w = c + id$ ovat yhtäsuuret täsmälleen silloin, kun $a = c$ ja $b = d$.

- Erityisesti kompleksiluku $z = a + ib$ on nolla täsmälleen silloin, kun $a = 0$ ja $b = 0$.
- Vertailuoperaatiot $<, \leq$ eivät ole määriteltyjä kompleksiluvuille.

Kompleksilukujen laskutoimitukset

Olkoot $z = a + ib$ ja $w = c + id$ kompleksilukuja. Tällöin laskutoimitukset saadaan seuraavasti.

- Summa:
$$z + w = (a + c) + i(b + d).$$
- Erotus:
$$z - w = (a - c) + i(b - d).$$
- Tulo:
$$zw = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$
- Osamäärä:
$$\frac{z}{w} = \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + i\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right).$$

Esimerkki

Olkoon $z = 3 + 4i$, $w = 1 - 5i$.

- $z + w = 4 - i$,
- $z - w = 2 + 9i$,
- $zw = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + i(4 \cdot 1 - 3 \cdot 5) = 23 - 11i$,
- $\frac{z}{w} = \left(\frac{3 \cdot 1 - 4 \cdot 5}{1^2 + 5^2}\right) + i\left(\frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 5}{1^2 + 5^2}\right) = -\frac{17}{26} + \frac{19}{26}i.$

Imaginääriyksikön potenssit

- $$i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1, \ldots$$
- $$\frac{1}{i} = -i, \qquad \frac{1}{i^2} = -1, \qquad \frac{1}{i^3} = i, \ldots$$

Reaaliluvut ja kompleksiluvut

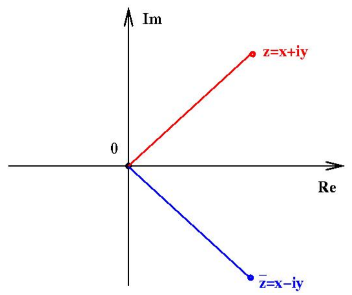
- Jos $z = a + 0i$, niin z on reaaliluku.
- Kaikki tähän mennessä annetut kaavat ovat tosia myös reaaliluvuille.
- Jos imaginaariosa on nolla, kaavat palautuvat tunnetuiksi reaalilukujen ominaisuuksiksi.

Kompleksilukujen algebraa

- Vaihdannaisuus:
$$z + w = w + z, \qquad zw = wz.$$
- Liitännäisyys:
$$(z + w) + u = z + (w + u), \qquad (zw)u = z(wu).$$
- Osittelulaki:
$$z(w + u) = zw + zu.$$

Kompleksikonjugaatti eli liittoluku

Kompleksiluvun $z = x + iy$ *kompleksikonjugaatti* eli *liittoluku* $\bar{z}$ määritellään $\bar{z} = x - iy$.



Liittoluvun geometrinen tulkinta.

Liittoluvun laskusääntöjä

- $$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \qquad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}.$$
- $$\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}, \qquad \overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}.$$
- $$z + \bar{z} = 2\ \mathrm{re}(z), \qquad z - \bar{z} = i2\ \mathrm{im}(z).$$
- $$\mathrm{re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \mathrm{im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$
- $$\bar{\bar{z}} = z.$$

Seuraus 1

Reaalikertoimiselle kompleksimuuttujan polynomille

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

pätee $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.

Todistus:

- Lasketaan
$$\overline{P(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_2 \bar{z}^2 + \ldots + \bar{a}_n \bar{z}^n.$$
- Koska a_k on reaalinen, $\bar{a}_k = a_k$ kaikilla $k = 0, \ldots, n$, saadaan
$$\begin{aligned} P(\bar{z}) &= a_0 + a_1 \bar{z} + a_2 \bar{z}^2 + \ldots + a_n \bar{z}^n \\ &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_2 \bar{z}^2 + \ldots + \bar{a}_n \bar{z}^n = \overline{P(z)}. \end{aligned}$$

Seuraus 2

Reaalikertoimisen polynomin nollakohta on joko reaalinen tai kompleksisessa tapauksessa liittolukupari.
Todistus:

- Olkoon $z = x + iy$ reaalikertoimisen polynomin P kompleksinen nollakohta.
- Edellisen nojalla saadaan
$$0 = \bar{0} = \overline{P(z)} = P(\bar{z}),$$
joten myös $\bar{z}$ on P:n nollakohta.

Kompleksitaso

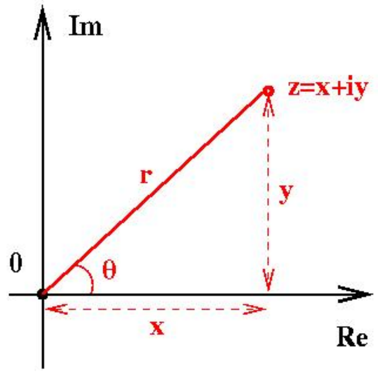
(Caspar Wessel 1797, Jean Argand 1806)

Moduli eli itseisarvo:

$$r \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Argumentti eli vaihekulma:

$$\theta \equiv \arg z = \arctan \frac{y}{x}.$$



Modulin ominaisuuksia:

- Koska kompleksiluvun moduli on (positiivinen) reaaliluku, vertailuoperaatiot $<, \leq, >, \geq$ ovat määriteltyjä.
- Kerto ja jakolasku:
$$|zw| = |z||w|, \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$
- Kolmioepäyhtälö:
$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Argumentin päähaara

- Argumentin arvot ovat välillä

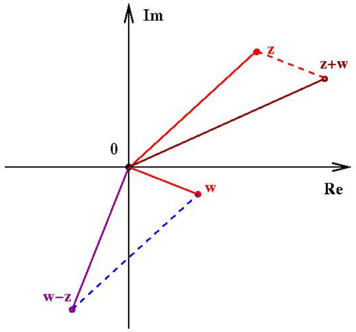
$$-\pi < \theta \equiv \arg z \leq +\pi.$$

- Yleisesti:

$$\arg z = \theta + 2n\pi,$$

missä θ on päähaaran arvo ja n on mikä tahansa kokonaisluku.

Yhteen- ja vähennyslaskun geometrinen tulkinta



Kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslasku vastaavat vektorien laskutoimituksia.

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 10: Polaarimuoto ja kompleksilukujen geometriaa

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Polaarimuoto

Kuvasta nähdään:

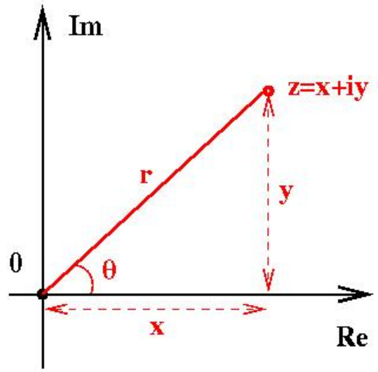
$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Siis

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r\cos\theta + ir\sin\theta. \end{aligned}$$

Saadaan kompleksiluvun esitys *polaarimuodossa*:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$



Eulerin kaava

Eksponenttifunktiolle ja trigonometrisille funktioille ovat voimassa seuraavat sarjaesitykset:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots \tag{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \ldots \tag{3}$$

Eulerin kaava, jatkoa

Jos hyväksytään annetut sarjaesitykset, niin:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots \\ &= 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \ldots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) \\ &= \cos(x) + i\sin(x). \end{aligned}$$

Saadaan *Eulerin kaava*:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{4}$$

Seurauksia, identiteetit trigonometrisille funktioille 1/2

Koska

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= \cos(\theta) - i\sin(\theta). \end{aligned}$$

Saadaan seuraavat kaavat:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \tag{5}$$

Seurauksia, identiteetit trigonometrisille funktioille 2/2

Yleisesti kompleksiluvulle $z = x + iy$ voidaan kirjoittaa

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Edelleen, voidaan myös määritellä

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Kertolaskun geometrinen tulkinta

- Sovelletaan Eulerin kaavaa kompleksilukujen kertolaskuun:

$$w = z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

- Kompleksilukujen kertolaskussa:
- Modulit kerrotaan: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- Argumentit lasketaan yhteen: $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Identiteettejä eksponenttifunktiolle

- $|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1.$
- Siis

$$|e^{i\theta}| = 1. \tag{6}$$

- Koska $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, saadaan

$$|e^z| = e^x, \qquad \arg(e^z) = y, \tag{7}$$

- $$e^{i2\pi} = 1, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1 \text{ ja } e^{-i\pi/2} = -i. \tag{8}$$

- $$e^{z+i2\pi} = e^z e^{i2\pi} = e^z. \tag{9}$$

De Moivren kaava

Lasketaan esitys kompleksiluvun kokonaislukupotenssille:

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{i(n\theta)} = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Erityisesti, jos $r = 1$, saadaan:

Lause (De Moivre)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \tag{10}$$

Kompleksiluvun juuret

De Moivren kaava on erityisen hyödyllinen etsittäessä kompleksiluvun $z_0 \neq 0$, n:nsiä juuria. Jos $z^n = z_0$, voidaan kirjoittaa $z = re^{i\theta}$ ja $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, ja saadaan

$$r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0},$$

eli

$$r = \sqrt[n]{r_0} \text{ ja } n\theta = \theta_0 + 2k\pi,$$

missä $r = \sqrt[n]{r_0}$ on positiivisen reaaliluvun r_0 n:s juuri.

Kompleksiluvun juuret, jatkoa

Kaikki luvun z n:net juuret saadaan siis kaavasta

$$\sqrt[n]{|z_0|}e^{i(\theta_0+2k\pi)/n}, \tag{11}$$

missä k on mikä tahansa kokonaisluku. Havaitaan myös, että jokainen $k = 0, 1, \ldots, n-1$ antaa eri arvon, mutta muut k:n arvot vain toistavat jonkun edellisistä, koska $e^{2\pi ik} = 1$. Siten kompleksiluvulla $z_0 \neq 0$ on täsmälleen n erillistä n:ttä juurta.

Kaavasta (11) havaitaan myös, että kaikki juurilla on sama itseisarvo $\sqrt[n]{|z_0|}$, ja argumentit ovat tasavälisiä. Siksi kaikki juuret sijaitsevat origokeskisen ympyrän, jonka säde on $\sqrt[n]{|z_0|}$ kehällä.

Kompleksiluvun juuret, jatkoa

Olemme osoittaneet:

Lause

Jos $z = re^{i\theta} \neq 0$, yhtälöllä $w^n = z$ on täsmälleen n erillistä ratkaisua, jotka saadaan kaavasta

$$w_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \tag{12}$$

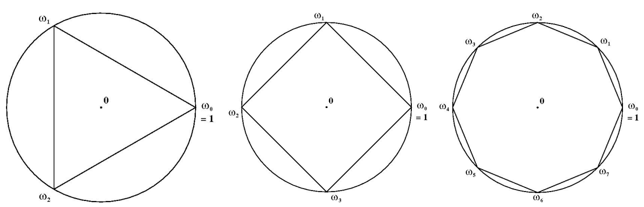
missä $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $\sqrt[n]{r}$ on luvun $r = |z|$ positiivinen n:äs juuri ja $\theta = \arg z$.

Ykkösen juuret

Esimerkki

Ykkösen n:net juuret saadaan kaavasta

$$\omega_k = e^{i2k\pi/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{13}$$



Kuva: Ykkösen n:net juuret, kun $n = 3, 4$ ja 8.

Ykkösen juuret, jatkoa

Jos asetetaan $\omega = e^{2\pi i/n}$, niin kaikki ykkösen n:nnet juuret ovat $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1}$.

Jos $\omega \neq 1$, saadaan $\omega^n = 1$, eli

$$\begin{aligned} 0 &= \omega^n - 1 \\ &= (\omega - 1)(1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1}). \end{aligned}$$

Saadaan:

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0 \qquad (\omega = e^{i2\pi/n}).$$

Kompleksiset matriisit 1/2

Matriisilaskennassa avaruuden $\mathbb{C}^n$ alkioita käsitellään sarakevektoreina (pystyvektoreina)

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Tällöin lineaarikuvaukset ovat aina muotoa

$$\mathbf{Av} = (a_{11}v_1 + \ldots + a_{1n}v_n, \ldots, a_{m1}v_1 + \ldots + a_{mn}v_n)$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \ldots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \ldots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Kompleksiset matriisit 2/2

Edellisessä käytettiin aikaisemmilta luennoilta tuttua matriisituloa.
Käytännössä siis lineaarikuvaukset $\mathbf{A}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ja matriisit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ voidaan samastaa keskenään.
Tällöin kuvausten $\mathbf{A}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ ja $\mathbf{B}\colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^m$ yhdistetty kuvaus $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ vastaa matriisituloa $\mathbf{BA} \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
Matriisiyhtälö $\mathbf{Av} = \mathbf{w}$ vastaa lineaarista yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + \ldots + a_{1n}v_n &= w_1, \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}v_1 + \ldots + a_{mn}v_n &= w_m. \end{cases}$$

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 11: Transpoosi

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Transpoosi

- Transpoosi vaihtaa matriisin rivit ja sarakkeet keskenään, eli

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = \mathbf{A}_{ji}.$$

- **Esim.**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Transpoosin laskulait

Laskulait

- $$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$
- $$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$
- $$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}.$$

Huomaa! **A**:n transpoosi on säännöllinen, jos ja vain jos **A** on säännöllinen.

Sisätulo ja symmetria

- Sisätulolle pätee: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}^T\mathbf{w}$. Sovitaan $\underset{1\times n}{\mathbf{v}^T}\underset{n\times 1}{\mathbf{w}} = \underset{1\times 1}{c}$ (skalaari).
- Symmetrinen matriisi: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, eli $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.
- Matriisin hajotelma: $\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$ ja siis $\mathbf{A}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{D}^T\mathbf{L}^T$.
- Jos **A** on symmetrinen, saadaan identiteetit
$$\mathbf{L} = \mathbf{U}^T, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^T, \quad \mathbf{U} = \mathbf{L}^T, \quad \text{eli} \quad \mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T.$$
- Symmetrisen matriisin hajotelma on symmetrinen!

Konjugoitu transpoosi

- Kompleksisille matriiseille $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ transpoosia luonnollisempi on konjugoitu transpoosi
$$\mathbf{A}^* \in \mathbb{C}^{n\times m}, \qquad a^*_{ij} = \bar{a}_{ji}.$$
- Toisin sanoen
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix}.$$

Kompleksinen sisätulo

Erityisesti vektorien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ sisätulo on
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \bar{u}_1 v_1 + \ldots + \bar{u}_n v_n = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 & \cdots & \bar{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \mathbf{u}^*\mathbf{v}.$$

Hermiittinen matriisi 1/2

- Neliömatriisi $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on *hermiittinen*, jos $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$.
- Reaalinen matriisi $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on *symmetrinen*, jos $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.
- Yleisesti matriisille $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pätee

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^*\mathbf{A}\mathbf{v} = (\mathbf{A}^*\mathbf{u})^*\mathbf{v} = \langle \mathbf{A}^*\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle.$$

- Lisäksi sisätulolle pätee

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j \bar{v}_j = \overline{\sum_{j=1}^{n} \bar{v}_j u_j} = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle}.$$

Hermiittinen matriisi 2/2

- Hermiittiselle matriisille $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ saadaan siis

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{u}\rangle}.$$

- Toisin sanoen, pätee $\langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{u}\rangle \in \mathbb{R}$.

Permutaatiot

- Permutaatiomatriisin rivit ovat **I**:n rivit toisessa järjestyksessä.
- Käänteispermutaatio on permutaatio eli $\mathbf{P}^{-1}$ on permutaatio. Lisäksi: $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$.
- Matriisit, joiden käänteismatriisit ovat niiden itsensä transpooseja, ovat *ortgonaalisia*.

Hajotelma PA=LU

- $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$: LU-hajotelman yhteydessä vaikenimme tilanteista, joissa rivien vaihto on tarpeen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \\ + \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3 \\ + \end{matrix}$$

$$\mathbf{LU} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{PA}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Hajotelma $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ on olemassa kaikille säännöllisille matriiseille.

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 12: Vektoriavaruuden kannan olemassaolo

Antti Rasila

Aalto-yliopisto

2016

Vektoriavaruuden kannan olemassaolo

- Jos $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ on äärellisulotteisen vektoriavaruuden V lineaarisesti riippumaton osajoukko, niin on olemassa vektorit $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_{k+m} \in V$ siten, että $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_{k+m}\}$ on V:n kanta.
- Erityisesti pätee: Jos $\dim(V) = n$ ja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ on lineaarisesti riippumaton, niin se on V:n kanta.
- Kantojen tärkein ominaisuus on seuraava: Jos $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ on vektoriavaruuden V kanta, niin jokainen vektori $\mathbf{v} \in V$ voidaan esittää muodossa $\mathbf{v} = c_1\,\mathbf{b}_1 + c_2\,\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\,\mathbf{b}_n$ täsmälleen yhdellä tavalla.

Kannanvaihto 1/4

- Tarkastellaan tilannetta, jossa tunnetaan vektorin esitys kannassa $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ ja halutaan vaihtaa toiseen kantaan $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.
- Lasketaan, miten uudet koordinaatit saadaan lausuttua vanhojen avulla.
- Merkitään vektorin $\mathbf{v}$ koordinaatteja näissä kannoissa

$$[\mathbf{v}]_B = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \quad \text{ja} \quad [\mathbf{v}]_U = (\eta_1, \ldots, \eta_n)\,.$$

- Oletetaan, että vanhat kantavektorit $\mathbf{b}^j$ on lausuttu uusien kantavektoreiden $\mathbf{u}^i$ avulla

$$\mathbf{b}^j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\,\mathbf{u}^i\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,. \tag{1}$$

Kannanvaihto 2/4

- Tällöin saadaan

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\,\mathbf{u}^i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\,\mathbf{b}^j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\,\mathbf{u}^i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} s_{ij}\,\beta_j \Big)\,\mathbf{u}^i\,.$$

- Koska vektorin koordinaatit (kannassa U) ovat yksikäsitteiset, on oltava

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\,\beta_j\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{2}$$

Kannanvaihto 3/4

- Merkitään

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

- Tällöin koordinaattien välinen yhtälö (2) voidaan kirjoittaa

$$[\mathbf{v}]_U = \mathbf{S}\,[\mathbf{v}]_B\,. \tag{3}$$

- Siten uudet koordinaatit saadaan matriisilla $\mathbf{S}$ kertomalla vanhoista, kun $\mathbf{S}$:n sarakkeina on vanhojen kantavektoreiden koordinaattivektorit uudessa kannassa.

Kannanvaihto 4/4

- Matriisia $\mathbf{S}$ kutsutaan *kannanvaihtomatriisiksi* ja se siis välittää yhtälön (3) mukaisesti koordinaattimuunnoksen.
- Kannanvaihtomatriisi on aina kääntyvä, ja vanhat koordinaatit saadaan uusista kaavalla

$$[\mathbf{v}]_B = \mathbf{S}^{-1}\,[\mathbf{v}]_U\,.$$

Ortogonaalisuus ja ortonormaalius 1/2

- Oletetaan, että $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ ovat vektoreita ja niiden sisätulo on määritelty.
- Tällöin vektoreita $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sanotaan keskenään *ortogonaalisiksi* (kohtisuoriksi), jos pätee $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$.
- Vastaavasti vektoreja $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ sanotaan ortogonaalisiksi, jos $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ aina kun $i \neq j$.
- Vektoreja $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ sanotaan *ortonormaaleiksi*, jos

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Ortogonaalisuus ja ortonormaalius 2/2

- Ortonormaalius siis tarkoittaa sitä, että vektorit ovat keskenään kohtisuorassa ja lisäksi jokaisen niistä normi (pituus) on 1.
- **Huom.** Ortogonaaliset (ja ortonormaalit) vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Ortonormaali kanta 1/2

- Seuraavaksi pohditaan, miten mistä tahansa lineaarisesti riippumattomasta vektorijonosta $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ saadaan ortonormaali.
- **Huom.** Vektorijono B on vektoriavaruuden $V = \mathrm{span}\, B$ kanta.
- Vektoriavaruuden ortonormaali kanta on ”mahdollisimman siisti”, ts. se on yleensä helpoin käsitellä sekä laskujen että teoreettisten tulosten kannalta.

Ortonormaali kanta 2/2

- Ortonormaalin kannan löytämiseen on seuraava erittäin hyödyllinen algoritmi, jota kutsutaan Gram-Schmidtin ortogonalisoimiseksi.
- Algoritmissa vektoreista $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ siis muodostetaan ortonormaali kanta $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ avaruudelle V.

Gram-Schmidtin ortogonalisointialgoritmi

1. Valitaan aluksi $\mathbf{u}_1 := \mathbf{v}_1/||\mathbf{v}_1||$. Saadaan avaruuden $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1\}$ ortonormaali kanta.
2. Jatketaan rekursiivisesti: Kun $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ on vektoriavaruuden $\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ ortonormaali kanta, voidaan valita

   $$\mathbf{w}_{k+1} := \mathbf{v}_{k+1} - \langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 - \ldots - \langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k.$$

   Nyt $\langle \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{u}_j \rangle = \langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{u}_j \rangle - \langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{u}_j \rangle \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ kaikilla $j = 1, \ldots, k$, koska $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ aina kun $i \neq j$, ja $\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle = 1$. Voidaan siis valita $\mathbf{u}_{k+1} := \mathbf{w}_{k+1}/||\mathbf{w}_{k+1}||$.
3. Toistetaan edellistä askelta, kunnes on käyty läpi kaikki vektorit $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Näin saadaan ortonormaali kanta.

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 13:Cholesky-hajotelma

Antti Rasila

Aalto-yliopisto

2016

Positiividefiniitti matriisi

- Hermiittinen matriisi $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on *positiividefiniitti*, jos $\langle \mathbf{u}, \mathbf{Au}\rangle > 0$ kaikilla $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.
- Symmetrinen matriisi $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on positiividefiniitti, jos $\mathbf{u}^T\mathbf{Au} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{Au}\rangle > 0$ kaikilla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- **Huom.** Jos $\mathbf{Au} = 0$ saadaan $\langle \mathbf{u}, \mathbf{Au}\rangle = 0$, eli $\mathbf{u} = 0$, kun $\mathbf{A}$ on positiividefiniitti.
- Siten positiividefiniitille matriisille $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pätee aina $N(\mathbf{A}) = 0$.
- Dimensiolauseen nojalla $\dim R(\mathbf{A}) = n$, eli $\mathbf{A}$ on kääntyvä (on olemassa käänteismatriisi $\mathbf{A}^{-1}$).

Cholesky-hajotelma

- Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermiittinen ja positiividefiniitti. Tällöin voidaan muodostaa hermiittinen LU-hajotelma eli *Cholesky-hajotelma* $\mathbf{A} = \mathbf{U}^*\mathbf{U}$, missä $\mathbf{U}$ on yläkolmiomatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat positiivisia.
- Jos $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, niin myös $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
- **Huom.** Tällainen hajotelma on olemassa vain hermiittisille ja positiividefiniiteille matriiseille.
- Matriisin positiividefiniittisyyttä voidaan tutkia yrittämällä muodostaa Cholesky-hajotelma.

Esimerkki 1/2

- Yritetään muodostaa Cholesky-hajotelma $\mathbf{A} = \mathbf{U}^*\mathbf{U}$ matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{11} & & \\ \bar{u}_{12} & \bar{u}_{22} & \\ \bar{u}_{13} & \bar{u}_{23} & \bar{u}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{pmatrix}$$

- Ensimmäiseltä riviltä saadaan $4 = |u_{11}|^2$, valitaan positiivinen ratkaisu $u_{11} = 2$.
- Saadaan myös $\bar{u}_{11}u_{12} = 2$, eli $u_{12} = 1$.
- Edelleen $\bar{u}_{11}u_{13} = 14$, joten $u_{13} = 7$.

Esimerkki 2/2

- Vastaavasti toisesta rivistä saadaan $|u_{12}|^2 + |u_{22}|^2 = 17$, joten $|u_{22}|^2 = 16$. Valitaan $u_{22} = 4$.
- Lisäksi $\bar{u}_{12}u_{13} + \bar{u}_{22}u_{23} = -5$, ja siis $u_{23} = -3$.
- Kolmannelta riviltä saadaan yhtälö $|u_{13}|^2 + |u_{23}|^2 + |u_{33}|^2 = 83$, eli $|u_{33}|^2 = 25$. Valitaan $u_{33} = 5$. Saadaan siis

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Huomautuksia

- Cholesky-hajotelman laskeminen vaatii noin puolet LU-hajotelman laskemisessa vaadittavasta työstä.
- Yleisesti algoritmi voidaan kirjoittaa muodossa

$$u_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{l=1}^{k-1} |u_{lk}|^2},$$

$$u_{kj} = \frac{1}{u_{kk}} \left(a_{kj} - \sum_{l=1}^{k-1} \bar{u}_{lk} u_{lk} \right), \qquad j > k.$$

- Juuren alla oleva luku on aina positiivinen, jos matriisi **A** on positiividefiniitti. Muuten algoritmi katkeaa.

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 14: Determinantti

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Determinantti

- **Determinantti** on pinta-ala, tilavuus tai yleistetty tilavuus.
- Determinantti on reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty vain neliömatriiseille.
- Formaaleja määritelmiä on lukuisia, joista yksi on jo tuttu:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \text{tukialkioiden tulo} = \det \mathbf{A}.$$

Determinantin ominaisuuksia 1/2

1. $\det \mathbf{I} = 1$.
2. Rivinvaihto vaihtaa determinantin merkin.
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}.$$
3. Determinantti on lineaarinen rivin suhteen:
$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Nämä ominaisuudet riittävät formaaliin määritelmään.

Determinantin ominaisuuksia 2/2

4. Jos kaksi riveistä on yhtäsuuria, on $\det \mathbf{A} = 0$.
5. Rivioperaatio ei muuta determinantin arvoa.
6. Rivi nollia nollaa determinantin.
7. Kolmiomatriisin determinantti on lävistäjien tulo.
8. Singulaarisen matriisin determinantti on nolla.
9. $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.
10. $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$.

Ominaisuuden 9 todistus 1/3

Väite: $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.
Todistus:
i) Oletetaan, että $|\mathbf{B}| \neq 0$. Tutkitaan lukua $D(\mathbf{A}) = \frac{|\mathbf{AB}|}{|\mathbf{B}|}$. Jos $D(\mathbf{A})$:lla on determinantin ominaisuudet 1, 2 ja 3, on $D(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$.

1. $$\mathbf{A} = \mathbf{I} \Rightarrow D(\mathbf{A}) = \frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{B}|} = 1.$$
2. Jos $\mathbf{A}$:n kaksi riviä vaihdetaan keskenään, samat rivit vaihtuvat tulossa $\mathbf{AB}$. $D(\mathbf{A})$ vaihtaa merkkiä aina, kun $\mathbf{A}$ vaihtaa.

Ominaisuuden 9 todistus 2/3

3. $\mathbf{A}$:n ensimmäisen rivin skaalaus skaalaa $\mathbf{AB}$:n ensimmäisen rivin samalla luvulla. Jos $\mathbf{A}$:n ensimmäinen rivi on kahden rivin summa, niin tulo $\mathbf{AB}$ voidaan kirjoittaa siten, että sen ensimmäinen rivi on kahden rivin summa (sisätulovariantti). $|\mathbf{AB}|$ hajoaa kahteen osaan, jotka jaetaan $|\mathbf{B}|$:llä.
   Ts.
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = (b_{ij}).$$
   Jos $a_{1j} = \tilde{a}_{1j} + \hat{a}_{1j}$, niin $a_{1j}b_{j1} = \tilde{a}_{1j}b_{j1} + \hat{a}_{1j}b_{j1}$. Käytetään ominaisuutta 3) ja osaväite seuraa.

Kaikki ehdot täyttyvät, joten $D(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|$.

Ominaisuuden 9 todistus 3/3

ii) $|\mathbf{B}| = 0$; $\mathbf{AB}$ on singulaarinen, jos $\mathbf{B}$ on. Tällöin siis $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = 0$.

Sarrus'n sääntö

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Yleinen kaava 1

- **Määritelmä 1:**

$$\det \mathbf{A} = \sum \det(\mathbf{P})\alpha_{1\alpha}\alpha_{2\beta}\cdots\alpha_{n\omega},$$

missä $\mathbf{P} \in n \times n$ permutaatiomatriisi, $\mathbf{P} = (\alpha, \beta, \cdots \omega)$.

- Toisaalta:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & a_{23} \\ a_{31} & & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} & & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{vmatrix}$$

Yleinen kaava 2

Määritelmä 2:

$$\det \mathbf{A} = \alpha_{i1}\mathbf{C}_{i1} + \alpha_{i2}\mathbf{C}_{i2} + \cdots + \alpha_{in}\mathbf{C}_{in},$$

missä liittotekijä $\mathbf{C_{ij}} = (-1)^{i+j}\mathbf{M}_{ij}$;
$\mathbf{M}_{ij}$ on $(n-1) \times (n-1)$-matriisi, joka muodostetaan poistamalla $\mathbf{A}$:n i:s rivi ja j:s sarake.

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 15: Vektoritulo

Antti Rasila

Aalto-yliopisto

2016

Ristitulo eli vektoritulo 1/2

Määritelmä: Olkoot **a** ja **b** kaksi avaruuden vektoria. Niiden vektoritulo eli ristitulo on vektori $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, joka määritellään seuraavilla ehdoilla:

1. $$||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}|| \sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$
2. $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b},$$
3. Vektorit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ muodostavat oikeakätisen systeemin.

Jos $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ tai $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, asetetaan $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Ristitulo eli vektoritulo 2/2

Lause:

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k};$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Skalaarikolmitulo

- **Skalaarikolmitulo**

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Pätee: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}]$.

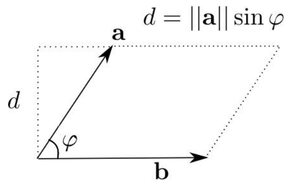
Pinta-ala, tilavuus

Lause:

- Vektoreiden **a** ja **b** virittämän suunnikkaan ala on $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||$.
- Vektoreiden $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ virittämän suuntaissärmiön tilavuus on $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|$.

Pinta-ala, tilavuus: Todistus

Suunikkaan ala: kanta $\times$ korkeus, siis $||\mathbf{b}|| ||\mathbf{a}|| \sin\varphi = ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||$.



Suuntaissärmiön tilavuus: pohja $\times$ korkeus

$$\begin{aligned} ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| ||\mathbf{c}|| \cos\psi &= ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| |\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{c}| \\ &= ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| \left| \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||} \cdot \mathbf{c} \right| \\ &= |\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}| = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|. \end{aligned}$$

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 16: Matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Ominaisarvot ja ominaisvektorit 1/5

Määritelmä

Skalaari $\lambda \in \mathbb{C}$ on matriisin $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *ominaisarvo* ja vektori $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ sitä vastaava *ominaisvektori*, jos

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \qquad \mathbf{v} \neq 0.$$

- Intuitiivisesti ominaisvektori on vektori, jonka suunta ei muutu kuvauksessa $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v}$.
- Myös vektorin $\mathbf{v}$ skalaarikerrannaiset $\alpha\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ovat ominaisarvoon λ liittyviä ominaisvektoreita, koska

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{v} = \alpha\lambda\mathbf{v} = \lambda(\alpha\mathbf{v}).$$

Ominaisarvot ja ominaisvektorit 2/5

- Kompleksiluku $\alpha \in \mathbb{C}$ on matriisin $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ominaisarvo, jos ja vain jos yhtälöllä $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$ on ei-triviaali ratkaisu $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.
- Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\lambda \in \mathbb{C}$ on matriisin $\mathbf{A}$ *karakteristisen polynomin*

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \tag{1}$$

nollakohta.

Ominaisarvot ja ominaisvektorit 3/5

- Algebran peruslauseen mukaan

$$P_{\mathbf{A}} = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}, \qquad (2)$$

  missä $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ovat matriisin ominaisarvot.
- Lukuihin $m_j := m_{\lambda_j}$ liittyen saadaan seuraava määritelmä.

Ominaisarvot ja ominaisvektorit 4/5

Määritelmä

Yhtälössä (2) esiintyvät luvut $m_1, \ldots, m_k$ ovat ominaisarvojen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ *algebralliset kertaluvut*, ja

$$E_j := E_{\lambda_j}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_j \mathbf{v}\}$$

on ominaisarvoon λ_j liittyvä *ominaisavaruus*. Luku

$$g_j := g_{\lambda_j} := \dim\big(E_j(\mathbf{A})\big)$$

on ominaisarvon λ_j geometrinen kertaluku.

Ominaisarvot ja ominaisvektorit 5/5

- Lisäksi määritellään:

Määritelmä

Matriisin $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *spektri* on sen ominaisarvojen joukko

$$\sigma(\mathbf{A}) := \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \text{ jollakin } \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\big\}$$

- Saadaan seuraava tulos:

Lause

Matriisin $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Todistus 1/2

Olkoot $\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$, $j = 1, \ldots, k$, $k \leq n$, missä $\lambda_j \neq \lambda_p$, kun $j \neq p$. Tehdään vastaoletus: $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ ovat lineaarisesti riippuvia. Tällöin yksi vektoreista voidaan esittää toisten lineaarikombinaationa. Olkoon l pienin indeksi, jolle $\mathbf{v}_{l+1}$ voidaan esitää muodossa

$$c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_l\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{l+1} \text{ joillekin } c_1, \ldots, c_l \in \mathbb{C}. \qquad (3)$$

Nyt saadaan

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_{l+1} = \mathbf{A}(c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_l\mathbf{v}_l) = c_1\mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \ldots + c_l\mathbf{A}\mathbf{v}_l.$$

Vektorit $\mathbf{v}_j$ ovat $\mathbf{A}$:n ominaisvektoreita, ja siten

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_l\lambda_l\mathbf{v}_l = \lambda_{l+1}\mathbf{v}_{l+1}.$$

Todistus 2/2

Vähennetään tästä yhtälö (3) kerrottuna luvulla λ_{l+1}. Saadaan

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{l+1})\mathbf{v}_1 + \ldots + c_l(\lambda_l - \lambda_{l+1})\mathbf{v}_l = 0.$$

Indeksin l valinnan perusteella vektorit $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Siten

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{l+1}) = \ldots = c_l(\lambda_l - \lambda_{l+1}) = 0.$$

Koska $\lambda_j \neq \lambda_p$, kun $p \neq j$, saadaan edelleen

$$c_1 = \ldots = c_l = 0, \text{ eli } \mathbf{v}_{l+1} = 0.$$

Tämä on ristiriita, koska vektorin $\mathbf{v}_{l+1}$ piti olla ominaisvektori. □

Hermiittisen matriisin ominaisarvot

Lause

Hermiittisen matriisin ominaisarvot ovat reaalisia.

Todistus. Olk. $\mathbf{A}$ hermiittinen, λ sen ominaisarvo ja $\mathbf{v}$ vastaava ominaisvektori. Tällöin

$$\lambda||\mathbf{v}||^2 = \lambda\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = \langle\lambda\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{A}\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$$

$$= \langle\mathbf{v},\mathbf{A}^*\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{A}\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{v},\lambda\mathbf{v}\rangle = \bar{\lambda}||\mathbf{v}||^2.$$

Siten $\lambda = \bar{\lambda}$, eli $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Esimerkki 1/3

Lasketaan matriisin $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ ominaisarvot ja -vektorit.
Muodostetaan karakteristinen polynomi:

$$P_{\mathbf{A}} = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda) - 9 = 3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 4\lambda - 6.$$

Ratkaistaan nollakohdat $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$. Saadaan

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 24}}{2} = 2 \pm \sqrt{10} =: \lambda_{\pm}.$$

Esimerkki 2/3

Seuraavaksi ratkaistaan ominaisvektorit yhtälöstä $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_{\pm}\mathbf{v}$,
eli $(\mathbf{A} - 2 \pm \sqrt{10}\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$.
Saadaan siis yhtälöt

$$\begin{pmatrix} 1 \mp \sqrt{10} & -3 \\ -3 & 1 \mp \sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gaussin eliminoinneilla matriisi saadaan muotoon

$$\begin{pmatrix} 1 \mp \sqrt{10} & -3 \\ -3 & 1 \mp \sqrt{10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \mp \sqrt{10} & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 \mp \sqrt{10} & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 3/3

Ominaisarvoa $\lambda_+ = 2 + \sqrt{10}$ vastaava ominaisvektori $\mathbf{v}_+$ voidaan ratkaista yhtälöstä $(1+\sqrt{10})v_1 + 3v_2 = 0$.

Esimerkiksi voidaan valita vektori $\mathbf{v}_+ = \begin{pmatrix} -3 \\ 1+\sqrt{10} \end{pmatrix}$.

Samaan tapaan ominaisarvoon $\lambda_- = 2 - \sqrt{10}$ liittyvät ominaisvektorit voidaan ratkaista yhtälöstä $(1-\sqrt{10})v_1 + 3v_2 = 0$.
Tässä tapauksessa voidaan siis valita vektori

$$\mathbf{v}_- = \begin{pmatrix} -3 \\ 1-\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 17: Diagonalisointi

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Matriisin diagonalisointi 1/3

Jos matriisilla $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$, niin yhtälössä

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{A}\mathbf{v}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\mathbf{v}_1 \cdots \lambda_n\mathbf{v}_n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

esiintyvä matriisi $\mathbf{V} = \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on kääntyvä.

Matriisin diagonalisointi 2/3

- Toisin sanoen, $\mathbf{AV} = \mathbf{V}\Lambda$ eli $\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1}$, missä
$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n\end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$
- Myös käänteinen tulos pätee: Jos tällainen hajotelma on olemassa, niin matriisin $\mathbf{V}$ sarakevektorit ovat matriisin $\mathbf{A}$ ominaisvektorit ja diagonaalimatriisin Λ diagonaalialkiot niitä vastaavat ominaisarvot.
- Kyseisen hajotelman etsimistä kutsutaan matriisin $\mathbf{A}$ *diagonalisoimikseksi*. Jos hajotelma on olemassa, matriisia $\mathbf{A}$ kutsutaan *diagonalisoituvaksi*.

Matriisin diagonalisointi 3/3

- Matriisin $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisoituvuus on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathbf{A}$:lla on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.
- Tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että ominaisarvojen λ_j geometriset ja algrebralliset kertaluvut ovat samat kaikilla $\lambda_j \in \sigma(\mathbf{A})$ eli $m_{\lambda_j} = g_{\lambda_j}$.
- **Huom.** Aina pätee $m_{\lambda_j} \geq g_{\lambda_j}$.

Esimerkki 1/3

- Diagonalisoidaan matriisi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Etsitään ominaisarvot yhtälöstä

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(-1-\lambda) - 0 = (1-\lambda)(1+\lambda) = 0.$$

- Saadaan $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = -1$.
- Etsitään seuraavaksi ominaisvektorit. Yhtälö

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, \text{ eli } (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = 0$$

Esimerkki 2/3

voidaan kirjoittaa

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 6 & -1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Siten $6v_1^1 - 2v_1^2 = 0$, ja ratkaisuksi käy esim. $\mathbf{v}_1 = (1, 3)$.
- Vastaavasti yhtälöstä

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2, \text{ eli } (\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = 0$$

saadaan

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 0 \\ 6 & -1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 3/3

- Nyt

$$\begin{cases} 2v_2^1 &= 0, \\ 6v_2^1 &= 0, \end{cases} \text{ joten } \begin{cases} v_2^1 &= 0, \\ v_2^2 &= \text{mielivaltainen}. \end{cases}$$

- Valitaan esim. $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$. Saadaan

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ joten } \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Edelleen,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1}.$$

Huomautuksia

- Diagonalisointia käyttäen voidaan kätevästi laskea matriisin $\mathbf{A}$ potensseja:
$$\mathbf{A}^2 = (\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1})^2 = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}\Lambda^2\mathbf{V}^{-1},$$
ja yleisesti $\mathbf{A}^n = \mathbf{V}\Lambda^n\mathbf{V}^{-1}$, missä
$$\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix}.$$
- Jos diagonalisoituvalla matriisilla on k-kertainen ominaisarvo, eli $m_{\lambda_k} = k > 1$ jollakin λ_j, niin on olemassa k sitä vastaavaa lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

Esimerkki 1/3

- Diagonalisoidaan matriisi (välivaiheet harj. teht.)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
- Kuten edellä, ominaisarvoiksi saadaan $\lambda_1 = 5$ ja $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Siten $m_5 = 1$ ja $m_1 = 2$.
- On siis löydettävä kaksi ominaisarvoon $\lambda = 1$ liittyvää lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, joille $\mathbf{A}\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v}$.

Esimerkki 2/3

- Päädytään matriisiin
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Siten vektorit $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$ ja $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 0)$ käyvät.
- Ominaisarvoa 5 vastaa ominaisvektori $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$.
- Saadaan
$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 3/3

- Tästä voidaan edelleen laskea
$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$
- Hajotelmaksi $\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1}$ saadaan siis
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Esimerkki

- Kaikki matriisit eivät ole diagonalisoituvia.
- Esimerkiksi matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

kaksinkertaista ominaisarvoa $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ vastaavat vain muotoa

$$\mathbf{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

olevat ominaisvektorit.

- Siten sillä ei ole kahta lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 18: Similaarisuus

Antti Rasila

Aalto-yliopisto

2016

Similaarisuus 1/3

Määritelmä

Matriisit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ja $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ovat *similaariset*, jos $\mathbf{A} = \mathbf{VBV}^{-1}$ jollakin $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Tällöin merkitään $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$.

Intuitiivisesti matriisien similaarisuus tarkoittaa, että ne ovat kannanvaihtoa vaille samat.

Matriisia $\mathbf{V}$ voi myös ajatella eräänlaisena ”normalisointina”. Tämän tapaisia määritelmiä esiintyy monissa matemaattisissa teorioissa.

Similaarisuus 2/3

- Similaarisuus on ekvivalenssirelaatio, toisin sanoen pätee:
  1. $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}$.
  2. Jos $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, niin $\mathbf{B} \approx \mathbf{A}$.
  3. Jos $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ ja $\mathbf{B} \approx \mathbf{C}$, niin $\mathbf{A} \approx \mathbf{C}$.
- Matriisi $\mathbf{V}$ voidaan tulkita kannanvaihtona seuraavasti: Olkoon $\mathbf{V} = \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kääntyvä.

  Tällöin vektorit $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ovat lineaarisesti riippumattomia ja siis avaruuden $\mathbb{C}^n$ kanta.

  Nyt jokainen $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$.

Similaarisuus 3/3

Tällöin pätee

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

eli $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{c}$.
Matriisin $\mathbf{A}$ määräämä lineaarikuvaus voidaan esittää kannassa $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ seuraavasti:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{V}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V})\mathbf{c},$$

missä $(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V})\mathbf{c}$ ovat vektorin $\mathbf{A}\mathbf{x}$ koordinaatit kannassa $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

Lause

Jos $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, niin niillä on samat ominaisarvot.

Todistus. Matriisin $\mathbf{A}$ karakteristiselle polynomille

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{V}\mathbf{B}\mathbf{V}^{-1} - \lambda\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}) = \det\left(\mathbf{V}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{V}^{-1}\right)$$

$$= \det(\mathbf{V})\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\det(\mathbf{V}^{-1}) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = P_{\mathbf{B}}(\lambda),$$

koska $\det(\mathbf{V})\det(\mathbf{V}^{-1}) = \det(\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}) = \det(\mathbf{I}) = 1$
Koska matriisin ominaisarvot ovat sen karakteristisen polynomin nollakohdat, saadaan $\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{B})$. $\square$

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 19: Schurin hajotelma

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Schurin hajotelma 1/3

- Diagonalisoinnin ideana on saattaa matriisi similariteettimuunnoksella $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{B}\mathbf{V}^{-1}$ mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon eli diagonaalimatriisiksi.
- Menettely ei kuitenkaan ole aina ongelmatonta:
  - Diagonalisointi ei ole aina mahdollista, koska hajotelmassa esiintyvä matriisi $\mathbf{B}$ ei ole aina diagonaalimatriisi.
  - Lopuksi joudutaan laskemaan käänteismatriisi $\mathbf{V}^{-1}$.
  - Hajotelman laskeminen on kuitenkin helppoa, jos matriisi $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on *unitaarinen* eli $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}$.

Schurin hajotelma 2/3

- Koska

$$\mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n \rangle \end{pmatrix},$$

matriisi on unitaarinen täsmälleen silloin, kun sen sarakevektorit ovat ortonormaaleja.

Schurin hajotelma 3/3

- Yleisessä tapauksessa voidana etsiä hajotelma, jossa on esiintyy diagonaalimatriisin sijasta yläkolmiomatriisi.

Lause (Schurin hajotelma)

Jokaiselle $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on olemassa yläkolmiomatriisi $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ja unitaarinen matriisi $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ siten, että

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^*.$$

Todistus 1/4

- Olk. λ jokin matriisin $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ominaisarvo. Valitaan ortonormaalit kannat $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k\}$ ja $\{\mathbf{q}_{k+1}, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ avaruuksille $E_\lambda(\mathbf{A})$ ja $E_\lambda(\mathbf{A})^\perp$.

Todistus 2/4

- Saadaan

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{q}_1 & \cdots & \lambda\mathbf{q}_k & \mathbf{A}\mathbf{q}_{k+1} & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{q}_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 & \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{A}\mathbf{q}_{k+1} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{A}\mathbf{q}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \langle \mathbf{q}_k, \mathbf{A}\mathbf{q}_{k+1} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_k, \mathbf{A}\mathbf{q}_n \rangle \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \langle \mathbf{q}_n, \mathbf{A}\mathbf{q}_{k+1} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_n, \mathbf{A}\mathbf{q}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Todistus 3/4

- Toisin sanoen
$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1 \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ 0 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}_1^*,$$
missä $\mathbf{I} \in \mathbb{C}^{k\times k}$, $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{C}^{k\times(n-k)}$ ja $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{C}^{(n-k)\times(n-k)}$.
- Toistetaan samat operaatiot matriisille $\mathbf{A}_1$, jolloin saadaan
$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_2 \begin{pmatrix} \mu\mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \mathbf{Q}_2^*, \qquad \mu \in \sigma(\mathbf{A}).$$
Nyt
$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1 \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ 0 & \mathbf{Q}_2 \begin{pmatrix} \mu\mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \mathbf{Q}_2^* \end{pmatrix} \mathbf{Q}_1^*$$

Todistus 4/4

$$= \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{I} & & \mathbf{Q}_2^*\mathbf{B}_1\mathbf{Q}_2 \\ 0 & \mu\mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \mathbf{Q}_2^*\mathbf{Q}_1^*.$$

- Samaan tapaan voidaan jatkaa matriisin alanurkkaan saakka, jolloin päädytään hajotelmaan
$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_l \mathbf{T} \mathbf{Q}_l^* \cdots \mathbf{Q}_1^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^*,$$
missä $\mathbf{T}$ on yläkolmiomatriisi ja $\mathbf{Q}$ on unitaarinen. □

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 20: Unitaarinen diagonalisointi

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Unitaarinen diagonalisointi

Määritelmä
Matriisi $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on *normaali*, jos $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$.

- Hermiittinen matriisi on normaali, koska $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$.
- Unitaarinen matriisi on normaali, koska $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{U}^*$.

Lause
Matriisi $\mathbf{A}$ on normaali jos ja vain jos se on *unitaarisesti diagonalisoituva*, eli se voidaan esittää muodossa $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^*$ jollakin unitaarisella $\mathbf{U}$ ja diagonaalisella Λ.

Todistus 1/2

- Olkoon $\mathbf{A} = \mathbf{UTU}^*$ Schurin hajotelma matriisille $\mathbf{A}$. Matriisin $\mathbf{A}$ normaalisuus on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathbf{AA}^* = \mathbf{AA}^*$.
- Siten
$$(\mathbf{UTU}^*)^*(\mathbf{UTU}^*) = (\mathbf{UTU}^*)(\mathbf{UTU}^*)^*,$$
ja siis
$$\mathbf{UT}^*\mathbf{U}^*\mathbf{UTU}^* = \mathbf{UTU}^*\mathbf{UT}^*\mathbf{U}^*.$$
- Koska $\mathbf{U}$ on unitaarinen, $\mathbf{UU}^* = \mathbf{I} = \mathbf{U}^*\mathbf{U}$, ja saadaan
$$\mathbf{UT}^*\mathbf{TU}^* = \mathbf{UTT}^*\mathbf{U}^*.$$

Todistus 2/2

- Kertomalla puolittain matriiseilla $\mathbf{U}^*$ ja $\mathbf{U}$, saadaan
$$\mathbf{T}^*\mathbf{T} = \mathbf{TT}^*. \tag{1}$$
- Yläkolmiomatriisi, jolle (1) pätee on diagonaalimatriisi, joten väite on todistettu. $\square$
- **Seuraus.** Normaalin matriisin eri ominaisarvoja vastaavat normeeratut ominaisvektorit ovat ortonormaaleja.
- Samaa ominaisarvoa vastaavat ominaisvektorit voidaan ortonormalisoida Gram-Schmidt -algoritmilla.

Esimerkki 1/3

- Osoitetaan, että matriisi
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
on normaali ja diagonalisoidaan se unitaarisesti.
- Lasketaan
$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 2/3

- Edelleen,
$$\mathbf{AA}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
eli sama tulos kuin edellä joten $\mathbf{A}$ on normaali.
- Etsitään matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot:
$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i),$$
eli $\lambda_\pm = \pm i$.

Esimerkki 3/3

- Ratkaistaan yhtälöt $\mathbf{Ax} = \lambda_\pm \mathbf{x}$. Saadaan
$$\begin{pmatrix} \mp i & 1 \\ -1 & \mp i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mp i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
eli $\mp ix_1 + x_2 = 0$.
- Valitaan
$$\mathbf{v}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}.$$
- Siten
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \mathbf{U \Lambda U}^*.$$

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 21: Singulaariarvohajotelma

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Singulaariarvohajotelma 1/3

- Jokainen matriisi $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ voidaan esittää muodossa
$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^*,$$
missä $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m\times p}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times p}$, $\Sigma \in \mathbb{C}^{p\times p}$, $p = \min\{n, m\}$.
- Matriisien $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ sarakevektorit $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{C}^n$ ovat ortonormaaleja ja
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0$$
ovat matriisin *singulaariarvot*.

Singulaariarvohajotelma 2/3

- Ominaisarvoja on vain neliömatriiseilla, mutta singulaariarvot ja -hajotelma on kaikilla matriiseilla.
- Matriisi $\mathbf{U}$ on unitaarinen, eli $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}$, jos $p = m$. Vastaavasti $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{-1}$, jos $p = n$.
- Jos $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, niin
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{U\Sigma V}^*\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \mathbf{u}_1 & \cdots & \sigma_p \mathbf{u}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_p \rangle \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{p} \sigma_j \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_j.$$

Singulaariarvohajotelma 3/3

- Siten $\mathbf{A}$ kertoo $\mathbf{x}$:n vektorin $\mathbf{v}_j \in \mathbb{C}^n$ suuntaisen komponentin $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_j \rangle$ singulaariarvolla $\sigma_j \geq 0$ ja siirtää sen suuntaan $\mathbf{u}_j$.
- Vektorit $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$, missä $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_p = 0$, muodostavat matriisin $\mathbf{A}$ kuva-avaruuden $R(\mathbf{A})$ kannan.
- Singulaariarvohajotelmalla on paljon erilaisia sovelluksia mm. signaalinkäsittelyssä, tilastotieteessä ja tieteellisessä laskennassa.

Singulaariarvohajotelman laskeminen 1/4

- Seuraavaksi tutkitaan, miten matriisille $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ voidaan löytää singulaariarvohajotelma.
- Huomataan aluksi, että matriisi $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on hermiittinen eli erityisesti normaali ja siten unitaarisesti diagonalisoituva.
- Lisäksi jos $\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, niin

$$||\mathbf{A}\mathbf{v}|| = \langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \lambda \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \lambda ||\mathbf{v}||^2.$$

- Siten ominaisarvot $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ ovat ei-negatiivisia.

Singulaariarvohajotelman laskeminen 2/4

- Voidaan valita

$$\sigma_j := \sqrt{\lambda_j} = ||\mathbf{A}\mathbf{v}_j||, \text{ kun } j = 1, \ldots, r.$$

- Lisäksi ominaisvektoreille $\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k$ pätee

$$\begin{cases} \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_j &= \lambda_j \mathbf{v}_j, \\ \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_k &= \lambda_k \mathbf{v}_k, \end{cases}$$

joten

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{v}_j, \mathbf{A}\mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k \rangle$$

$$= \langle \lambda_j \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k \rangle = \lambda_j \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k \rangle = 0,$$

koska $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ on unitaarisesti diagonalisoituva.

Singulaariarvohajotelman laskeminen 3/4

- Siten vektoreille

$$\mathbf{u}_j = \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_j}{||\mathbf{A}\mathbf{v}_j||} \in \mathbb{C}^m$$

pätee $\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k \rangle = 0$, kun $j, k \leq r$ ja $j \neq k$.
- Näin ollen, jokaiselle $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n \in \mathbb{C}^n$ pätee

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = c_1\mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \ldots + c_r\mathbf{A}\mathbf{v}_r + c_{r+1} \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0$$

$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle ||\mathbf{A}\mathbf{v}_1|| \mathbf{u}_1 + \ldots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_r \rangle ||\mathbf{A}\mathbf{v}_r|| \mathbf{u}_r.$$

Singulaariarvohajotelman laskeminen 4/4

- Jos täydennetään $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ ortonormaaliksi vektorijoukoksi $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ mielivaltaisella tavalla, saadaan
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{p} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_j \rangle ||\mathbf{A}\mathbf{v}_j|| \mathbf{u}_j = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*\mathbf{x}.$$
Tässä
$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_p \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_p \end{pmatrix},$$
ja
$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_p \end{pmatrix}.$$

Aalto University

Matriisilaskenta
Luento 22: Yhteenveto singulaariarvohajotelman laskemisesta

Antti Rasila
Aalto-yliopisto

2016

Yhteenveto singulaariarvohajotelman laskemisesta 1/2

1. Diagonalisoi unitaarisesti $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^*$ siten, että
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_p = 0.$$
2. Aseta $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$, $j = 1, \ldots, p$, ja $\mathbf{u}_j = \mathbf{A}\mathbf{v}_j/\sigma_j$, $j = 1, \ldots, r$.
3. Täydennä $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ ortonormaaliksi joukoksi $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$, jos $r < p$. Unohda $\mathbf{v}_{p+1}, \ldots, \mathbf{v}_r$, jos $n > p$.

Yhteenveto singulaariarvohajotelman laskemisesta 2/2

Tällöin
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_p^* \end{pmatrix} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*.$$

Esimerkki 1/5

- Lasketaan matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

singulaariarvohajotelma.

- Lasketaan aluksi

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 2/5

- Muodostetaan karakteristinen polynomi

$$P_{\mathbf{A}^*\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -9 \\ -9 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)^2 - 81 = \lambda(\lambda - 18).$$

- Ominaisarvolle $\lambda_1 = 18$ saadaan yhtälö $\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = 18\mathbf{v}_1$, eli

$$\begin{pmatrix} 9-18 & -9 \\ -9 & 9-18 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -9 & -9 \\ -9 & -9 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = 0.$$

- Saadaan $v_1^1 = -v_1^2$, ja siten voidaan valita

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 3/5

- Ominaisarvosta $\lambda_2 = 0$ saadaan vastaavasti yhtälö

$$\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = 0,$$

eli $v_2^1 = v_2^2$. Voidaan valita

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

- Nyt $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{18}$, ja $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 0$.

Esimerkki 4/5

- Saadaan myös

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_1}{\sigma_1} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Huomaa, että $||\mathbf{u}_1|| = 1$ automaattisesti.

- Koska $\sigma_2 = 0$, täytyy $\mathbf{u}_2$ etsiä erikseen. Vektorit $\mathbf{u}_1$ ja $(1, 0, 0)$ ovat lineaarisesti riippumattomia, ja ne voidaan ortonormeerata Gram-Schmidt -algoritmilla:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (1,0,0) - \langle \mathbf{u}_1, (1,0,0) \rangle \mathbf{u}_1 \\ &= (1,0,0) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{8}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{9}\right). \end{aligned}$$

Esimerkki 5/5

- Nyt
$$||\mathbf{w}|| = \sqrt{64/81 + 4/81 + 4/81} = \sqrt{72/81} = \sqrt{8}/3.$$
- Saadaan
$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{8}} \\ \frac{\frac{2}{3\sqrt{8}}}{} \\ -\frac{2}{3\sqrt{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}/3 \\ \sqrt{2}/6 \\ -\sqrt{2}/6 \end{pmatrix}.$$
- Siten singulaariarvohajotelma on $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$, missä
$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1/3 & 3\sqrt{2}/3 \\ -2/3 & \sqrt{2}/6 \\ 2/3 & -\sqrt{2}/6 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$