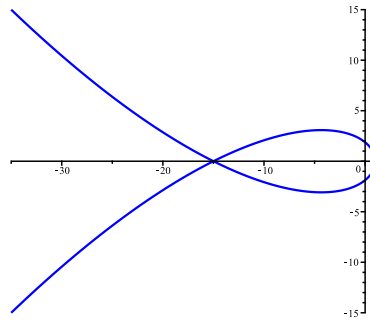


Tentti 21.2.2022 klo 9:00–13:00.

Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.

Kaikki kurssille osallistuneet voivat halutessaan laskea kuusi tehtävää, mutta arvona määräytyy vain viiden parhaan koetehtävän ja laskaripisteiden perusteella.

1. Parametrisoitu tasokäyrä  $x = 1 - 4t^2$ ,  $y = 4t - t^3$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , muodostaa kuvion mukaisen silmukan.
  - a) Määritä leikkauskohtaa vastaavat parametrin  $t$  kaksi eri arvoa. (1 p.)  
Vihje:  $y = 0$ .
  - b) Määritä a-kohdassa saatuja parametrin arvoja vastaavat tangenttivektorit ja laske niiden välinen kulma. (3 p.)
  - c) Millainen integraali antaa leikkauspisteen rajaaman silmukan kaarenpituisuuden? Integraalin arvoa ei tarvitse laskea (mutta sen voi tehdä numeerisesti sopivalla ohjelmalla). (2 p.)



2. Määritä pinnan

$$x^2 - 2xy + y^5 - \sin z = 0$$

pisteeseen  $(1, 1, 0)$  asetetun tangenttitason yhtälö.

3. Johda funktion  $f(x, y) = e^{-x} \sin 2y$  toisen asteen Taylorin polynomi pisteen  $(0, 0)$  ympäristössä.
4. Määritä funktion  $f(x, y, z) = 2x - 4y + 8z$  suurin ja pienin arvo pallopinnalla  $x^2 + y^2 + z^2 = 21$  Lagrangen kertojien menetelmällä.

5. Suppeneeko epäoleellinen tasointegraali

$$\iint_B \frac{1}{1+x^2+y^2} dA,$$

kun  $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ ?

**Vihje:**  $\frac{d}{dr} \ln(1+r^2) =$  jotain hyödyllistä.

6. Tarkastellaan  $2a$ -sivuista kuutiota  $D$ , joka voidaan kuvata epäyhtälöin

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a, -a \leq z \leq a\}.$$

Oletettakoon kuution sisältämän materiaalin tiheyden toteuttavan  $\rho(x, y, z) = |z| + a$ . Pyöritetään kuutiota  $z$ -akselin ympäri, jolloin sen hitausmomentti on

$$I_z = \iiint_D \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) dV.$$

Etsi arvo geometriselle vakiolle  $k$ , jolla hitausmomentti saadaan esitettyä muodossa  $I_z = kma^2$ , missä

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z) dV$$

on kuution kokonaismassa.